Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die rekursiv gegebene Folge

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1, \quad a_0 = 1$$

konvergiert.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, etwa unter Verwendung der Exponentialreihe,

$$e^{-x^2} - 0,00015 \leq 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$$

für $|x| \leq 0,1$.

Aufgabe 3:
(a) Finden Sie alle kritischen Punkte und deren Typ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)^2 - \cos(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion tatsächlich ein globales Minimum hat.

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und es gebe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > c > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.

Aufgabe 5:
(a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y(x)^2}{y(x)^2 + 1}.$$

(b) Berechnen Sie speziell die Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Wie weit lässt sich diese Lösung fortsetzen?