Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}.$$

(a) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe.

(b) Ist die Reihe absolut konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:
(a) Beweisen Sie

$$\ln(x) < x - 1 \qquad \text{für alle } x > 0,\ x \neq 1.$$

(b) Beweisen Sie

$$x^e < e^x \qquad \text{für alle } x > 0,\ x \neq e.$$

Aufgabe 3:
(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3 \sin(x)}.$$

(b) Berechnen Sie für alle $a > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{a + \sin(x)^2}\, dx.$$

Aufgabe 4:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

(c) Entscheiden Sie mit Hilfe von (b), ob f zweimal stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)\cos(x) - 2y(x)\sin(x) = x.$$