Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei die positive reelle Zahl $r > 0$ fest gewählt. Man betrachte die durch $a_1 = r$ und

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{r a_n^2 + a_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Man zeige, dass

$$0 < a_n < r + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Man zeige, dass die Folge streng monoton wächst.

(c) Man zeige, dass die Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Man untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(b) Man bestimme die Monotonie-Intervalle von f.

(c) Man bestimme $f(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3:

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt.$$

(a) Man bestimme (etwa unter Verwendung der Kosinus-Reihe) die Taylorreihe von F mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

(b) Man berechne $F^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass f stetig ist.

(b) Man zeige, dass f partiell differenzierbar ist.

(c) Man untersuche, ob f kritische Stellen besitzt.

Aufgabe 5:

(a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

(b) Man zeige, dass die Funktion $\phi_p :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\phi_p(x) = \frac{e^x}{x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{2e^x}{x^3} \qquad \text{(D)}$$

ist.

(c) Man bestimme die Lösung $\phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ von (D) mit

$$\phi(1) = 0, \quad \phi'(1) = 0.$$