Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x > 0$

$$e^x \geq ax$$

gilt.

Aufgabe 3

Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1}, & \text{für } x \neq 1, \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f stetig ist.

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

(c) Beweisen Sie, zum Beispiel mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewendet auf die Funktion ln: Zu jedem $x > 1$ existiert ein $\xi \in]1, x[$ mit

$$f(x) = \frac{1}{\xi}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen lokale Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y).$$

liegen.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie zur Anfangswertbedingung

$$y(0) = \frac{1}{2} \; bzw. \quad y(0) = 2$$

jeweils die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)^2 \cdot \cos(x)$$

und geben Sie den jeweiligen maximalen Definitionsbereich an.