Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Sei für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}.$$

(a) Zeigen Sie für alle $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

mit Hilfe vollständiger Induktion.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ einen Grenzwert a besitzt.

(c) Finden Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \geq 2$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \arctan(x)$$

differenzierbar ist, und beweisen Sie $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von (a)

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Für eine fest gewählte reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, werde die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ bezeichne T_n das n-te Taylorpolynom von f mit dem Entwicklungspunkt a.

(a) Bestimmen Sie $T_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie

$$T_n(x) \neq f(x)$$

für alle $x \neq a$.

(b) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von n und λ) alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$T_n(x) < f(x).$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Auf der offenen Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

werde die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = x + \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3}$$

definiert.

(a) Begründen Sie, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist, und bestimmen Sie für alle (x,y) $\in D$ den Gradienten und die Hessematrix von f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(c) Untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen.

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie für die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''(x) - 2\alpha y'(x) + y(x) = 0$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reelles Fundamentalsystem.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = 2e^x$$

mit

$$y(0) = y'(0) = -1.$$