Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f :]-\infty, \frac{1}{4}[\to \mathbb{R},$$

definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

(a) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (1-4x)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{für alle } x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$$

mit Hilfe von vollständiger Induktion.

(b) Man bestimme die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und berechne ihren Konvergenzradius.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)$$

auf der Definitionsmenge $D =]0, \infty[$.

(a) Man bestimme $f(D)$.

(b) Man zeige

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Aufgabe 3

Man zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ die Beziehung

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

gilt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Auf der Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

werde die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

betrachtet. Man bestimme die globalen Extremstellen von f auf D.

Aufgabe 5

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\alpha(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

sowie

$$\alpha(0) = 1.$$

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot y(x) + \alpha'(x), \qquad y(0) = 1.$$