## Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1**

(a) Berechnen Sie

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + - \dots$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und es gebe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(|a_n|) < nc \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Zeigen Sie für den Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

die Abschätzung $r > e^{-c}$.

**Aufgabe 2**

(a) Weisen Sie nach, dass die Gerade

$$T_p(x) = (p - x + 1) \cdot e^{-p}$$

die Tangente an die Funktion $f(x) = e^{-x}$ im Punkt $p \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Jede dieser Tangenten umschließt mit der $x$-Achse und der $y$-Achse ein Dreieck. Maximieren Sie die Fläche dieses Dreiecks für $p \geq 0$. Weisen Sie dabei nach, dass es sich tatsächlich um ein Maximum auf $[0, \infty[$ handelt.

**Aufgabe 3**

Überprüfen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_a(x, y) = x^3 - y^2 - axy$$

auf kritische Punkte und lokale Extrema.

**Aufgabe 4**

Überprüfen Sie, ob die Funktion $f : ]-1, 1[ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die für $x \neq 0$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3e}\,(1+x)^{1/x}, & \text{für } x > 0, \\[2ex] \dfrac{\tan(x) - x}{\sin(x)^3}, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

definiert ist, in 0 stetig fortsetzbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{1 + y(x)}, \qquad y(0) = 0,$$

und finden Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung.