Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Aufgabe 2

(a) Leiten Sie die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x = 0$ von

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

aus einer bekannten Potenzreihe her und bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Reihe konvergiert.

(b) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ $f^{(2n)}(0)$, wobei $f^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung von $f(x)$ bezeichnet.

(c) Berechnen Sie für $|x| < 1$

$$-2x^2 + 4x^4 - 6x^6 + - \ldots$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

genau eine Lösung $a > 0$ im Intervall $]0, 1[$ hat.

(b) Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_0 = 0$ und

$$x_{n+1} = e^{-\frac{x_n^2}{2}}.$$

Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = |x_n - a|$ streng monoton fallend ist. Zeigen Sie dann, dass die Folge gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x + y).$$

Berechnen Sie mit genauer Begründung das Maximum und das Minimum von f auf D, wobei D die Kreisscheibe mit Radius 1 um $(0, 0)$ sei, also

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y : [0, \ln(2)[\to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^x y(t)(y(t) + 1)\, dt = y(x) - 1 \qquad \text{für alle } 0 \leq x < \ln(2).$$