Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Gegeben sei die durch $a_1 = 0$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n} - 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Man zeige

$$0 \leq a_n \leq 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + \ln(x).$$

Man zeige:

(a) Die Funktion f ist bijektiv.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$|f^{-1}(b) - f^{-1}(a)| < \frac{b-a}{2}.$$

Dabei bezeichnet $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f(0) = 0$$

und

$$f'(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Man zeige:

(a) $a = 0$ ist die einzige Nullstelle von f und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{n-1} = (f'(0))^{n-1}.$$

(b) Ist f sogar stetig differenzierbar, so gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f(x))^n}{f(x^n)} = (f'(0))^{n-1}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x.$$

(a) Man bestimme alle kritischen Punkte von f.

(b) Man bestimme alle lokalen Maximal- und Minimalstellen sowie alle Sattelpunkte von f.

Aufgabe 5

Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - y(x) = 2e^x$$

mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$