Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, mit vollständiger Induktion.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Reihe
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$$
(mit dem Summationsanfang bei $n = 3$) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 2

Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = x^3.$$
Es bezeichne G den Graphen von f. Für ein fest gewähltes $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$ sei T die Tangente an G im Punkt $P = (a, a^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass G und T neben dem Punkt P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt Q besitzen, und geben Sie die Koordinaten von Q an.

(b) Zeigen Sie, dass die von G und T zwischen den Punkten P und Q begrenzte Fläche den Inhalt
$$A = \frac{27}{4}a^4$$
besitzt.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \int_0^x \ln(e^t + 1)\, dt.$$

(a) Begründen Sie, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^3},$$
zum Beispiel mit Hilfe der Taylorformel.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in der Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ ihrer Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein isoliertes lokales Minimum besitzt.
Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}$ die einzige Nullstelle von f', so nimmt f in a das globale Minimum an.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 - (x-2)^3 \cdot y^2.$$

Zeigen Sie, dass f genau einen kritischen Punkt, nämlich eine isolierte lokale Minimalstelle, besitzt, aber keine globalen Extremstellen.

Aufgabe 5

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)^4, \quad y(0) = a. \tag{$*$}$$

Bestimmen Sie für $a \in \{-1, 0, 1\}$ jeweils die Lösung

$$\phi_a : D_a \to \mathbb{R}$$

von $(*)$ unter Angabe des maximalen Definitionsintervalls $D_a \subseteq \mathbb{R}$.