Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:
Sei $x_0 \in [0,1]$ und
$$x_{n+1} = x_n - x_n^4 \qquad \text{für} \qquad n \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $x_n \in [0,1]$ für alle $n \geq 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei die Gerade $y = 3x - 1$ die Tangente an den Graphen von f in $(0, f(0))$. Außerdem sei die Tangente an den Graphen von f in $(1, f(1))$ die Gerade $y = 12 - 3x$.

a) Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_1 \in]0,1[$ gibt mit $f'(x_1) = 10$.

b) Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_2 \in]0,1[$ gibt mit $f(x_2)f'(x_2) = -10$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}.$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung f' und deren Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f (Minima oder Maxima) sowie
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x).$$

c) Berechnen Sie
$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Aufgabe 4:
Sei
$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2\}$$
und sei $f : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$
Bestimmen Sie die globalen Extrema von f.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = (\sin(1))^{1/3},$$

wobei $f : \mathbb{R} \times]0,1[\to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f(x, y) = \frac{2\sqrt{1-y^6}}{3y^2} x e^{x^2}.$$