Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die durch $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$ sowie

$$a_{n+1} = 4\,a_n - 3\,a_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

b) Weisen Sie die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

nach und zeigen Sie die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq 3$$

etwa mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

Aufgabe 2:

In Abhängigkeit vom Parameter $a \in \,]0, +\infty[$ seien die beiden Funktionen

$$f_a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \frac{(x-a)\,e^x}{e^x - 1},$$

und

$$h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_a(x) = e^x - x + a - 1,$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass

$$h_a(x) \geq a \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen f_a streng monoton ist, und berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} f_a(x).$$

c) Zeigen Sie, dass f_a surjektiv ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Kurve

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 2\,e^t \cos(t) \\ 2\,e^t \sin(t) \\ e^{2t} - t \end{pmatrix},$$

auf dem abgeschlossenen Intervall $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von φ.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + x\,y^2 - x.$$

a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f in der x–y–Koordinatenebene.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Minimalstellen und Maximalstellen sowie alle Sattelpunkte von f.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \qquad y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = (6\,x - 1)\,e^x.$$

a) Bestimmen Sie alle $r,\ s \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = (r\,x^2 + s\,x)\,e^x,$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$ ist.

b) Bestimmen Sie die maximale Lösung von $(*)$ mit den Anfangswerten

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 3.$$