Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $a + b < 1$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n.$$

a) Zeigen Sie, dass $x_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

c) Überprüfen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$2x + \sin(1 - \cos(x)) = 1$$

genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{Z}$, so dass die Lösung im Intervall

$$[a, a + 1] \subset \mathbb{R}$$

liegt.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass

$$g(x + y) < g(x) + y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$.

Aufgabe 3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) f ist stetig auf $\mathbb{R}$ und besitzt unendlich viele Nullstellen.

b) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und besitzt unendlich viele kritische Punkte (= Nullstellen der Ableitung).

c) Die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und unstetig im Punkt $x = 0$.

Aufgabe 4:

Sei

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 \le y \le 2-(x-2)^2\}\,.$$

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von D.

b) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = (y-(x-2)^2)(y+(x-2)^2-2) - \frac{y^2}{2} + y.$$

Bestimmen Sie das globale Minimum und Maximum von f auf D.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}.$$

a) Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie die Existenz einer Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y(1) = 0.$$