

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

- a) Weisen Sie nach, ob die folgenden Reihen divergieren oder konvergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(1+n)^{(n^2)}}.$$

- b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Aufgabe 2:

- a) Berechnen Sie für $a \geq 2$

$$g(a) = \int_2^a \frac{x^2 - 2x - 1}{x - x^3} dx.$$

- b) Geben Sie $g'(a)$ an und zeigen Sie, dass g in

$$a = 1 + \sqrt{2}$$

ein globales Maximum auf dem Intervall $[2, \infty[$ hat.

Aufgabe 3:

- a) Weisen Sie nach, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 + y^2,$$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ist.

- b) Liegt in $(0, 0)$ ein lokales Extremum vor?

Aufgabe 4:

Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'' + y' = x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Aufgabe 5:

a) Geben Sie die Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \exp(x^2),$$

im Entwicklungspunkt 0 an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a)

$$f^{(n)}(0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.