Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ mit einer positiven reellen Zahl a.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und folgern Sie aus dem Ergebnis, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a .$$

c) Konvergiert auch die Zahlenfolge $\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen e^a?
Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Differentialgleichung
(1)

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto w(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ mit zwei beliebigen Lösungen y_1, y_2 von (1) die Differentialgleichung
(2)

$$w' + a\,w = 0$$

erfüllt.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung (2) und folgern Sie aus dem Ergebnis, dass

$$w(x_0) \neq 0 \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{R} \iff w(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} .$$

c) y_1, y_2 seien zwei nichttriviale Lösungen der Differentialgleichung (1) mit

$$y_1(x_0) = 0 \ , \ y_2(x_0) \neq 0 \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann y_1, y_2 linear unabhängig sind.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{(1+x)(1-2x)}.$$

a) Geben Sie eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ an.
[Hinweis: Partialbruchzerlegung!]

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus a) und das Verhalten auf dem Rande des Konvergenzintervalls.

c) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k der Reihe aus a) die Rekursionsgleichung

$$a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

erfüllen.

Aufgabe 4:
Die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, dass die auf $I \times I$ definierte Funktion

$$(x,y) \mapsto g(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{für } x \neq y \\ f'(x) & \text{für } x = y \end{array} \right\}$$

auch in jedem Punkt $(x_0, x_0) \in I \times I$ stetig ist.
[Hinweis: Man beachte den Mittelwertsatz!]

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die lokalen Minima der durch $f(x,y) = x^4 + 2x^3 + y^2$ definierten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
[Hinweis: Zur Untersuchung des kritischen Nullpunkts betrachte man die Funktion auf der Parabel $y = x^2$]

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

mit einer positiv definiten Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, im Nullpunkt ein absolutes Minimum besitzt.