Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^4}\right).$$

Aufgabe 2:

a) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sei die Funktion $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\ln x}$. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion und die Nullstelle(n) der Ableitung.

Aufgabe 3:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit den Eigenschaften $f(a) < g(a)$ und $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in]a, b[$.

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(x^2)$, im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Beweisen Sie, dass $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}$ für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y \geq 0 \text{ und } x^2+y^2=3\}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = \exp(x+y)$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Begründen Sie, warum die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie die Werte des Maximums und Minimums der Funktion f.

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{2\cos^2(y)}{1-x^2} \qquad \text{mit } y(0) = \frac{\pi}{3}.$$