Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{\ln n}{n}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $n \geq 3$ gilt $a_n > a_{n+1}$.

b) Mit $n_k := 2^k$ ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent.

d) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:
Gegeben ist für $m \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_m :]-\infty, 2\pi[\to \mathbb{R}; \quad f_m(x) := \begin{cases} mx & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x-\sin x}{1-\cos x} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Folgende Tatsachen sind ausführlich zu begründen:

a) Die Funktion f_m ist für jede reelle Zahl m in $x_0 = 0$ stetig .

b) Für $m \leq 0$ gilt $f_m(]-\infty, 2\pi[) = [0, \infty[$.

c) Für $m = \frac{1}{3}$ ist f_m in $x_0 = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit den Eigenschaften

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right) \text{ für alle } x_1, x_2 \text{ mit } x_1 \cdot x_2 < 1; \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x \text{ für alle reellen Zahlen } x > 0. \qquad \text{(ii)}$$

a) Zeigen Sie (durch spezielle Wahl der reellen Zahlen x_1, x_2):

   i) $f(0) = 0$;

   ii) f ist *ungerade*, d.h. $f(x) + f(-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Folgern Sie mit (ii), dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Zugrunde gelegt sei hier ein kartesisches (x, y)–Koordinatensystem. Bestimmen Sie für $c > 0$ die Punkte der Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2x\}$, die vom Punkt $(c, 0)$ den kleinsten Abstand haben.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die beiden inhomogenen linearen Differentialgleichungen

$$x\,y' = 2y + x^2 \qquad (x > 0) \tag{1}$$

und

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \qquad (x > 0). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie ohne Ermittlung der allgemeinen Lösung von (1): Jede mindestens dreimal stetig differenzierbare Lösungsfunktion $y = f(x)$ von (1) ist auch eine spezielle Lösung von (2).

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'''(x) = \frac{2}{x} \ (x > 0), \quad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 2.$$