Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 2:
Die Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = x\cdot(2x-1+\ln(x)).$$

Beweisen Sie:

a) $g = f'$ ist streng monoton wachsend auf $]0,\infty[$.

b) $g = f'$ hat genau eine Nullstelle in $]0,\infty[$.

c) f hat genau ein lokales Extremum in $]0,\infty[$, und zwar ein Minimum.

Aufgabe 3:
Die Funktion $f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

a) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ eine Formel für die n-te Ableitung von f und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

b) Bestimmen Sie zu f das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$, bezeichnet mit $T_2(x;2)$.

c) Beweisen Sie

$$|f(x) - T_2(x;2)| \leq \frac{1}{16}$$

für alle $x \in [1,3]$.

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - x^4 - y^4.$$

Untersuchen Sie f auf lokale Extrema.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y$$

für $x > 0$.