Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{(n+1)!}.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}?$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f :]3, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_3^{x^2+x} \frac{1}{t^3+1}\, dt.$$

b) Gegeben sei die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(t) = (\exp(-t)\cos(t), \exp(-t)\sin(t)).$$

Berechnen Sie die Länge der Kurve.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie das absolute Minimum und Maximum von

$$f(x, y) = 2xy - x + y$$

auf

$$D = [-2, 2] \times [-2, 2].$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+\pi) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0. \tag{*}$$

Beweisen Sie:

a) Die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x) = \phi(x+\pi),$$

ist auch Lösung der Differentialgleichung (*).

b) Ist

$$\phi(\pi) = \phi(0), \quad \phi'(\pi) = \phi'(0)$$

so gilt

$$\phi(x+\pi) = \phi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.