Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = 2 - e^{-x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = x$ genau eine Lösung $\tilde{x}$ im Intervall $[0, \infty[$ hat.

(b) Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_{n+1} = f(x_n)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1 = 0$. Zeigen Sie, dass diese Folge streng monoton wächst und gegen $\tilde{x}$ konvergiert.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$
für $|x| < 1$ (zum Beispiel mit der geometrischen Reihe).

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein eindeutiges globales Minimum $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ hat, und dass $\tilde{x} \in \,]-2, -1[$ gilt.

(b) Beweisen Sie
$$f(x) > -1$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4:
Finden Sie den Kreiszylinder mit Höhe h und Radius r, der das maximale Volumen
$$V = \pi r^2 h$$
bei gegebener Oberfläche
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 1$$
hat. Beweisen Sie, dass in den gefundenen Werten tatsächlich ein Maximum angenommen wird.

Aufgabe 5:
Finden Sie alle reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{3x} + x.$$