Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8n^2+7n+4}{47n^3+4n^2+5n+5}, & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{2n} (x-2)^{2n}$$

konvergiert.

Aufgabe 2

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nicht leere, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, deren Rand ∂A nicht leer ist, und seien $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf ∂A übereinstimmen, also

$$g|_{\partial A} = h|_{\partial A}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{für } (x,y) \in A, \\ h(x,y), & \text{für } (x,y) \notin A, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann hat f höchstens einen Fixpunkt, das heißt höchstens einen Punkt $p \in \mathbb{R}$ mit $f(p) = p$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine surjektive, stetige Funktion $f : [-1,1] \to]-1,1[$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(b) Untersuchen Sie für jeden kritischen Punkt von f, ob dort ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder kein lokales Extremum von f vorliegt.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + 8y''(x) + 16y(x) = 64\exp(2x).$$

($y^{(4)}$ bezeichnet die vierte Ableitung von y.)