Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n .$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} .$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \exp\left(\arctan(x + \ln(x))\right).$$

(a) Bestimmen Sie $f(]0,\infty[)$ mit Begründung aller Zwischenschritte.

(b) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $e^{\frac{\pi}{4}}$.

Es darf verwendet werden, dass $\tan(\pi/4) = 1$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 y - 9\, e^{-\frac{1}{3}} x e^y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f sowie deren Typ.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + \frac{y(x)}{(x+1)(x+2)} = (x+2)\,e^x, \qquad y(0) = 2$$

und geben Sie das maximale Definitionsintervall an.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

(b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(c) Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit nach x im Punkt $(0,0)$.