Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

und

$$x_{n+1} = \arcsin(x_n) - x_n$$

(a) Zeigen Sie

$$0 < \arcsin(x) - x < 1$$

für alle $x \in]0,1]$.

(b) Beweisen Sie ohne Taschenrechner, dass $x_2 < x_1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist.

(d) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen $3 < \pi < 4$ verwenden.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich $W = \tanh(\mathbb{R})$ der Funktion tanh.

(b) Zeigen Sie, dass tanh injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\tanh^{-1} : W \to \mathbb{R}$.

(d) Berechnen Sie $(\tanh^{-1})'(0)$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{(y-2)^2 + e^{(x-1)^2} - 1}, & (x,y) \neq (1,2), \\ 1, & (x,y) = (1,2). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Sei $a \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Gegeben sei die Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ alle kritischen Punkte (Nullstellen des Gradienten) der Funktion f_a.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ alle lokalen Extrema der Funktion f_a. Untersuchen Sie, bei welchen es sich sogar um globale Extrema handelt.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-2x}.$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen α, β, so dass

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-2x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Lösung y des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) + f(x)y(x) &= x - 2 \\ y(1) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

mit Angabe des maximalen Lösungsintervalls.