Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Sei $a \in [0, \infty[$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + (2-a)^n}{a^{n+1} + (2-a)^{n+1}}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^6.$$

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie

$$\frac{x^2}{4} \leq 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2} \qquad \text{für alle } x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

(b) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 4

Sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1+x} \leq y \leq x^2 e^{x^3},\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq e\}.$$

Skizzieren Sie K und berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ von K.

Aufgabe 5

Gegeben sei für $x > 0$ das Anfangswertproblem

$$y''(x) - \frac{6}{x} y'(x) + \frac{12}{x^2} y(x) = 2,$$
$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 9.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{x^3, x^4\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\xi(x) = cx^n$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Bestimmen Sie die globale Lösung des Anfangswertproblems.