Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Es sei
$$a_n = \int_0^n \frac{e^{-s}}{1+s^2}\, ds.$$
Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie, für welche $N \in \{1,2\}$ die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(kN\pi)}{k^N}$$
konvergiert.

(b) Bestimmen Sie, für welche $N \in \{1,2\}$ die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kN\pi)}{\sqrt[N]{k}}$$
konvergiert.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = xe^{(x^2)}$$
und $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f. Zeigen Sie, zum Beispiel mit der Taylorreihe, dass $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 4

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ sei
$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{ax}\sin(bx).$$
Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f_{a,b}$ folgende zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

- $f_{a,b}$ ist surjektiv.
- Es gilt
$$\lim_{x\to\infty} f_{a,b}(x) = 0.$$

Aufgabe 5

Es sei

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y \leq 1,\ -2 \leq y \leq 0\}$$

und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + ye^{x+y}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge R.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte im Inneren von R.

(c) Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den f auf R annimmt.