Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, zum Beispiel mit dem Mittelwertsatz, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$$

divergiert.

(c) Folgern Sie, dass die Folge

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

divergiert.

Aufgabe 2

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \arctan|x|$$

und

$$g(x) = \cos(f(x)).$$

(a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f differenzierbar ist. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion g differenzierbar ist. Berechnen Sie in diesen Punkten die Ableitung.

Aufgabe 3

Es sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom P_2 der Funktion f im Entwicklungspunkt 2.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [2, 3]$ die Abschätzung

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{512}$$

gilt.

(c) Geben Sie – ohne Verwendung eines Taschenrechners – eine rationale Zahl an, die $\sqrt{5}$ bis auf $\frac{1}{500}$ genau approximiert.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x - (y - 3)^2)(y - x - 1).$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze der Menge

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

an. Kennzeichnen Sie in dieser Skizze auch die Bereiche

$$P := \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$$

und

$$N := \{(x, y) : f(x, y) < 0\}.$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f und bestimmen Sie, ob in einem von diesen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 5

Gegeben seien die beiden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{y(x)^2}, \quad y(1) = 1, \tag{D1}$$

und

$$u'(x) = -\frac{1}{x \cdot u(x)^2}, \quad u(1) = 1. \tag{D2}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $J \subseteq]0, \infty[$ ein Intervall und ist $u : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (D2), so ist $y : J \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = x \cdot u(x)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (D1).

(b) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (D2).

(c) Geben Sie nun eine Lösung des Anfangswertproblems (D1) an (unter Zuhilfenahme der Teilaufgaben (a) und (b)).