Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge mit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

(a) Zeigen Sie $a_n \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und folgern Sie, dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$R \geq \frac{1}{4}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie

$$(1 - x - x^2 - x^3) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in\,]-R, R[$.

(c) Schreiben Sie

$$f : \,]-R, R[\, \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

als gebrochen rationale Funktion.

Aufgabe 2

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{x^2}^{x^4} \exp(-t^2)\, dt.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}.$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

(d) Zeigen Sie: Die Funktion f besitzt ein globales Minimum.

Aufgabe 3

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}(x_1 + \ldots + x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1}$$

gilt, und folgern Sie

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|\}$$

und

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - 24x - 3y^2.$$

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Zeigen Sie, dass f kein globales Maximum besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie alle Punkte $p \in D$, an welchen die Funktion f ihr globales Minimum annimmt.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1 + x^2} + \arctan(x).$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 + x^2) \cdot y'(x) - 2x \cdot y(x) = 1.$$