Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______	**Frühjahr 2024**	**43912**
Kennwort: ______		
Arbeitsplatz-Nr.: ______		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Lineare Algebra/Geometrie**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 9

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $v = (2,0,1,0)^\top \in \mathbb{R}^4$ in dem von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum liegt, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums $W = \operatorname{span}(\{w_1, w_2, w_3, w_4\})$ von $\mathbb{R}^5$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \; w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) Seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Elemente des $\mathbb{R}^4$, $U = \operatorname{span}(\{u_1, u_2\})$ und $W = \operatorname{span}(\{u_3, u_4\})$.

Bestimmen Sie Vektoren x_1, x_2 und x_3 des $\mathbb{R}^4$ so, dass x_1 eine Basis von $U \cap W$, $\{x_1, x_2\}$ eine Basis von U und $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis von $U + W$ ist.

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$, so gibt es für alle Untervektorräume $W \subseteq V$ genau einen Untervektorraum U mit

$$V = W \oplus U.$$

b) Ist A eine reelle Matrix, so gilt:

$$A = 0 \iff A^{\top}A = 0.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & y \end{pmatrix}, \; B(y) = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dann ist folgende Abbildung linear:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \det(A(x,y)B(y)^{-1}).$$

3. Aufgabe

Gegeben sei die Quadrik

$$P: \quad X^2 - 2XY + Y^2 - 3X + Y + 4 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von P und zeigen Sie, dass P eine Parabel ist.

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und die Symmetrieachse der Parabel P.

4. Aufgabe

Es sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Es seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$(u,w) = (v,w) \text{ für alle } w \in V \iff u = v.$$

b) Sei $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und

$$W = \{w \in V \mid (u,w) = (v,w)\}.$$

Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von V ist, und bestimmen Sie die Dimension von W.

5. Aufgabe

Es bezeichne g die Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$, welche die Punkte $\binom{1}{-2}$ und $\binom{0}{0}$ enthält. Weiter sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden g.

a) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $x = \binom{x_1}{x_2}$ seinen Lotfußpunkt auf der Geraden g und die Koordinaten des Bildpunktes $F(x)$. Bestimmen Sie zudem eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$F(x) = Ax \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$