Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Bestimmen Sie alle reellen 2×2-Matrizen A mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

Von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei Folgendes bekannt:

- $Ax_1 = -x_1$ für ein $x_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- $A^\top x_2 = 2x_2$ für ein $x_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- $\det(A) = 0$.

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Spur von A.

3. Aufgabe

Es sei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad U = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = SAS\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

c) Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3},\ A \mapsto A - SAS.$$

4. Aufgabe

Der $\mathbb{R}^3$ sei versehen mit dem Standardskalarprodukt. Weiter seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass $U = \operatorname{span}\{b_1, b_2\}$.

b) Es sei $P_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf U. Untersuchen Sie, ob die Gleichung

$$P_U(x) - x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt.

5. Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix, die nicht die Einheitsmatrix ist. Weiter sei $\operatorname{Spur}(A) = 2$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x = x^\top x\}$$

eine Quadrik beschreibt, und bestimmen Sie deren Typ.