Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \quad .$$

b) Zeigen Sie, dass der Vektor

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-12, 3, 0, 0, 0)$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

ist.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems aus b).

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix M diagonalisierbar?

Aufgabe 3:

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade $L := \mathbb{R} \cdot (0, 1, 1)$ und die Ebene $E := \{z = 0\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (x, y, z)$ von L.

b) Es sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte $P \in \mathbb{R}^3$, welche von L und E den gleichen Abstand haben. Geben Sie eine Gleichung für Q an und zeigen Sie damit, dass Q eine Quadrik ist.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die euklidische Normalform des Kegelschnitts mit der Gleichung

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 6x + 8y = 0.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ werde das Dreieck mit den Ecken

$$A = (0,0), \quad B = (2,0), \quad C = (2,1)$$

betrachtet.

a) Bestimmen Sie für dieses Dreieck den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises.

b) Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangenten T_A, T_B und T_C an den Umkreis in den Punkten A, B und C.

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte

$$A' \text{ von } T_A \text{ und } BC, \quad B' \text{ von } T_B \text{ und } CA, \quad C' \text{ von } T_C \text{ und } AB$$

dieser Tangenten mit den Verlängerungen der ihnen gegenüber liegenden Dreiecksseiten.