Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für die reelle 3×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

Es seien $U = Kern(f)$ der Kern von f und $W = Bild(f)$ der Bildraum von f.

a) Zeigen Sie, dass sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt. Bestimmen Sie eine Basis u_1, u_2 von U und eine Basis w_1, w_2 von W.

b) Entscheiden Sie, ob es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $Kern(g) = W$ und $Bild(g) = U$ gibt und begründen Sie diese Entscheidung.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die reelle 3×3-Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte dieser Matrix.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^t S P = D$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die reelle 3×3-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma_B(x, y) := x^t \cdot B \cdot y \quad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Skalarprodukt σ_B auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels, den die beiden Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts σ_B einschließen.

Aufgabe 4:

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien das Dreieck Δ mit den Ecken

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

sowie das Dreieck Δ' mit den Ecken

$$a' = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c' = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die beiden Dreiecke im kartesischen Koordinatensystem der Ebene und berechnen Sie ihre Seitenlängen.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

mit einer Drehmatrix D und einem Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gibt, welche das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet. Geben Sie D und t explizit an.

Aufgabe 5:

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y ist die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y - 4 = 0 \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q.