Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, \quad \text{und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a gibt es keine, bzw. genau eine, bzw. unendlich viele Lösungen? Geben Sie in den letzten beiden Fällen jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 2:

Die lineare Hülle W der Vektoren $w_1 = (1, 0, -1, 1)^t$ und $w_2 = (3, 1, -4, 2)^t$ ist ein Untervektorraum des euklidischen $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von W und bestimmen Sie damit die Matrix der Orthogonalprojektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$D := \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Bestimmen Sie für diese Drehung einen Richtungsvektor der Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $v_1 = (2, 1, 2)^t$ ein Eigenvektor von S ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von S und eine orthogonale Matrix T so, dass die Matrix $T^t S T$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 5:

Gegeben seien im euklidischen $\mathbb{R}^3$ die Gerade g_1 durch ihre Punkte $A = (0, 0, 2)^t$ und $B = (1, 0, 10)^t$, sowie die Gerade g_2 durch ihren Punkt $C = (3, 2, 7)^t$ und ihren Richtungsvektor $v = (0, 1, 4)^t$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, welche die Gerade g_1 enthält und zur Geraden g_2 parallel ist.

b) Welchen Abstand hat die Gerade g_2 von der Ebene E? Liegt g_2 auf der gleichen Seite von E wie der Ursprung?