Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die reelle, von zwei reellen Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abhängige 3×3-Matrix

$$A(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 1 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) .$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid A(\lambda, \mu) \text{ ist nicht invertierbar.}\}$$

ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie den Typ dieses Kegelschnitts und folgern Sie, dass es ein $R > 0$ gibt, so dass $A(\lambda, \mu)$ für alle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2 + \mu^2 \geq R^2$ invertierbar ist.

Aufgabe 2:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reelle Matrizen, so dass das Matrizenprodukt $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert ist. Im Folgenden bezeichnen wir mit A, B und AB ebenso die durch diese Matrizen gegebenen linearen Abbildungen

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \ B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ und } AB : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

Es gelte:

$$\ker(AB) = \ker(B) .$$

Man zeige:

a) Ist $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\text{Bild}(B)$, so sind die Vektoren $Aw_1, \ldots, Aw_r$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$.

b) Es gilt: $\text{rang}(AB) = \text{rang}(B)$.

c) Es gilt: $\dim \ker(A) \leq \dim \ker(B)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 15 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne $E_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $(E_3 - A)^2 = 0$ gilt und bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

b) Zeigen Sie, dass A nur einen Eigenwert besitzt und nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die Ebene

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = -1\} \subset R^3$$

und zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Teilmenge

$$G_\lambda := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \lambda z = -1 \text{ und } -2x - 3y + \lambda z = 1 + \lambda\} \subset \mathbb{R}^3$$

im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass G_λ für jede Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Gerade ist und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden in Parameterform an.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass E und G_λ einen nicht-leeren Schnitt haben und berechnen Sie diesen jeweils.

Aufgabe 5:
Zeigen Sie:

a) Für Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$SA^2S^{-1} = \left(SAS^{-1}\right)^2.$$

b) Ist $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar und hat B nur nicht-negative Eigenwerte, so existiert eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A^2 = B$.

Bestimmen Sie

c) eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$