Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen und sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit der Eigenschaft $M \cdot M = M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Matrix $M' := (E_n - M) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (wobei $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix sei) erfüllt die Gleichung $M' \cdot M' = M'$.

b) $\mathrm{Bild}(M) = \mathrm{Kern}(M')$ und $\mathrm{Bild}(M') = \mathrm{Kern}(M)$ (wobei wir eine Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der zugeordneten linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identifizieren).

c) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Bild}(M) \oplus \mathrm{Kern}(M)$.

Aufgabe 2:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$.

b) Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$ seien paarweise linear unabhängig. Dann sind auch die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

c) Es gibt eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot x.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und auf Surjektivität.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Prüfen Sie, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5:
Sei e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Standardskalarproduktes den Abstand des Punktes $\sqrt{2}e_1$ von der Ebene $U \subseteq \mathbb{R}^4$, welche von den Vektoren $e_1 + e_2$ und $e_3 + e_4$ aufgespannt wird.