Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.

c) Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2:

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Nullpunkt und (v_1, v_2) eine Basis von E mit $\|v_1\| = \|v_2\|$. Der Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ stehe senkrecht auf E. Zeigen Sie:

a) Die Vektoren $v_1 + v_2$ und $v_1 - v_2$ stehen aufeinander senkrecht.

b) Es gibt eine Drehung $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\delta(v_1) = v_2, \delta(v_2) = v_1$ und $\delta(v_3) = -v_3$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei π die lineare Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ ist $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$.

b) $\mathrm{Kern}(\pi) \cap$ Bild $(\pi) = \{0\}$.

c) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Kern}\ (\pi) +$ Bild (π).

Aufgabe 4:

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, die von der Geraden $L = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und dem Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gleich weit entfernt sind.

Zeigen Sie, dass K ein Kegelschnitt ist und bestimmen Sie den Typ und die metrische Normalform von K.

Aufgabe 5:

Sei A eine invertierbare reelle $n \times n$–Matrix mit $A^{-1} = A$.
Die $n \times n$–Einheitsmatrix wird mit E_n bezeichnet.

Zeigen Sie:

a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) $(A + E_n) \cdot (A - E_n) = 0$.

c) Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $A = -E_n$. Ist -1 kein Eigenwert von A, so ist $A = E_n$.