Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Es bezeichne $V := \{f(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 3\}$ den reellen Vektorraum aller reellen Polynome, deren Grad höchstens 3 ist.

a) Zeigen Sie, dass bei vorgegebenem $c \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\varphi_c : V \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(X) \mapsto f(c)$$

linear ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums

$$U_c := \{f(X) \in V \mid f(c) = 0\}\ .$$

c) Bestimmen Sie die Dimension des Durchschnitts $U_0 \cap U_1$ und eine Basis davon.

2. Aufgabe

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}\ ,\ X \mapsto AX - XB\ .$$

a) Zeigen Sie: Ist

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der transponierten Matrix ${}^tB$ zum Eigenwert μ,

so ist

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix} = x \cdot {}^ty$$

ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

b) Haben A, B einen gemeinsamen Eigenwert, so gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{0\}$ mit $AC = CB$.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -18 & 8 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

reell diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

4. Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\ker(A) \subset \ker(A^2)$.

b) Genau dann gilt sogar $\ker(A) = \ker(A^2)$, wenn $\mathrm{Bild}(A) \cap \ker(A) = \{0\}$.

5. Aufgabe

Betrachten Sie den Kegel

$$K := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3 ,$$

sowie die Ebene $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$, die den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ als Lot hat.

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass der Schnitt $E_\lambda \cap K$ eine Parabel ist.

1