Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\dim(\ker(f)) = m \geq 1$, so dass

$$\operatorname{Bild}(f) \cap \ker(f) = \{0\} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung

$$f|_{\operatorname{Bild}(f)} : \operatorname{Bild}(f) \to \operatorname{Bild}(f)$$

ein Isomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Summe $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in \ker(f)$ und $v_2 \in \operatorname{Bild}(f)$ schreiben lässt.

c) Zeigen Sie, dass es eine Basis von V gibt, bezüglich der die lineare Abbildung durch eine Blockmatrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

mit einer invertierbaren Matrix $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ für $k = n - m$ gegeben ist.

Aufgabe 2:
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei Q_λ der Kegelschnitt

$$Q_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda x^2 + 2xy + 2y^2 + \lambda^2 - 4 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass Q_λ eine Ellipse ist.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A, zeigen Sie, dass A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x - y + 2z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

a) Geben Sie eine Parameterform von E an.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, so dass

$$T^{-1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$$

gilt.

Aufgabe 5:
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für jedes $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\operatorname{Rang} A^2 \leq \operatorname{Rang} A$.

b) Ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix, dann ist B invertierbar.

c) Sei $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det C^2 = \det C$, so ist C eine orthogonale Matrix.