Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei P_2 der reelle Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei

$$L : P_2 \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) - p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass L surjektiv ist und bestimmen Sie $\dim(\ker(L))$ (die Dimension des Kerns $\ker(L)$ von L).

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(L)$.

d) Bestimmen Sie die L darstellende Matrix bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von P_2 und der Standardbasis $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2:
Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Wann nennt man eine Teilmenge $U \subseteq V$ einen *Untervektorraum* von V?

b) Man nennt eine Teilmenge $A \subseteq V$ einen *(nichtleeren) affinen Unterraum* von V, falls ein Untervektorraum U von V und ein $p \in V$ existiert mit

$$A = p + U := \{p + u \mid u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass in dieser Situation auch $A = x + U$ für jeden Punkt $x \in A$ gilt.

c) Seien A und B affine Unterräume von V, so dass $A \cap B \neq \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cap B$ wieder ein affiner Unterraum von V ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Eine reelle $n \times n$-Matrix A ist bekanntlich genau dann orthogonal, wenn $A^\top A = E_n$ gilt, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichne. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen über reelle 2×2-Matrizen entweder einen Beweis oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel:

a) Ist A orthogonal, so muss $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ sein.

b) Ist A orthogonal, so sind 1 und -1 die einzig möglichen reellen Eigenwerte von A.

c) Ist A orthogonal, so muss A den Eigenwert 1 oder den Eigenwert -1 besitzen.

d) Ist A orthogonal, so ist A auch invertierbar.

e) Ist A orthogonal, so ist A auch symmetrisch.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die reelle Matrix 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

ferner werde die Nullmatrix des $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit O bezeichnet.

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$ (= Nullvektor im $\mathbb{R}^3$) und finden Sie alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = O$.

b) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$ mit $AB = O$ (wie in Teil a)) an, so dass *zusätzlich* auch $BA = O$ gilt.

Aufgabe 5:
Für einen reellen Parameter t ist durch

$$x^2 + y^2 + 2t\,xy = 1$$

ein Kegelschnitt K_t gegeben.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, um welchen euklidischen Typ von Kegelschnitt es sich dabei handelt. Für welche(s) t ist K_t ein Kreis?

b) Bestimmen Sie für diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für die K_t eine Ellipse, aber kein Kreis ist, die Längen a und b der beiden Halbachsen sowie den Winkel $\alpha \in [0, \pi[$, um den man die x-Achse in mathematisch positiver Richtung („gegen den Uhrzeigersinn") um den Ursprung drehen muss, damit sie die größere der beiden Halbachsen überdeckt.