Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die von zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige 3×3 Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ a & b^2 & -4a \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Menge A derjenigen Parameterpaare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die die Matrix M nicht invertierbar ist, und zeigen Sie, dass A die Vereinigung von drei Geraden ist.

b) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i) genau eine Lösung?
ii) unendlich viele Lösungen?
iii) keine Lösung?

Aufgabe 2:

Es seien V_1 und V_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1)$, so ist $V_1 \cup V_2$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

b) Es seien nun $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_1$ surjektive lineare Abbildungen. Zeigen Sie: Die Abbildungen f und g sind bijektiv.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Es sei

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: E_α ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ schneiden sich die beiden Ebenen E und E_α?

Aufgabe 4:
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome des Grades höchstens 2.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts.

Aufgabe 5:
Sei Q die Quadrik

$$Q := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 - 4xy + 19y^2 - 44x + 118y + 189 = 0\}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^2$, welcher mit dem Standardskalarprodukt versehen sei. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q sowie die Scheitelpunkte von Q.