Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Wieviele $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ gibt es mit

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:

Für $a, b \in \mathbb{R}^2$ sei $[a, b] := \det(a, b)$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Zeigen Sie:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto [x, y]z + [y, z]x + [z, x]y$ ist $\mathbb{R}$-linear.

b) $x, y \in \mathrm{Kern}(f)$.

c) f ist die Nullabbildung.

Aufgabe 3:

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^3 - 3A^2 + 3A - E_3 = 0$, hierbei bezeichnet E_3 die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeigen Sie:

a) A hat genau einen Eigenwert, nämlich 1.

b) Wenn A zusätzlich diagonalisierbar ist, so ist $A = E_3$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle bijektiven affinen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die x-Achse in die y-Achse überführen.

b) Zeigen Sie, dass es unter allen bijektiven affinen Abbildungen aus a) genau eine Drehung δ um den Punkt $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ gibt, und beschreiben Sie δ, indem Sie einerseits die Form $\delta(x) = Ax + t$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $t \in \mathbb{R}^2$ und andererseits Drehwinkel und Drehrichtung angeben.

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie den affinen Typ der durch

$$x^2 + (2s-2)xy + (s^2 - s)y^2 + 2x + (2s-1)y + 1 = 0$$

gegebenen ebenen Quadrik in Abhängigkeit des reellen Parameters s.

b) Im Fall $s = 2$ ist die Quadrik aus a) eine Ellipse. Bestimmen Sie die Hauptachsen (im Sinne von Symmetrieachsen) dieser Ellipse.