Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 3}$ aller reellen 3×3-Matrizen eine Basis besitzt, deren Elemente entweder symmetrische oder schiefsymmetrische Matrizen sind. (Zur Erinnerung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A = -A^\top$ gilt, wobei $A^\top$ die zu A transponierte Matrix bezeichnet.)

b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}, \; A \longmapsto A^\top.$$

Geben Sie alle Eigenwerte und die Dimensionen der Eigenräume von f an, ohne das charakteristische Polynom von f zu berechnen.

c) Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Tetraeder T_1 mit den Eckpunkten (A_1, A_2, A_3, A_4) und T_2 mit den Eckpunkten (B_1, B_2, B_3, B_4) im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Seitenlängen der beiden Tetraeder und geben Sie eine Bewegung an, die T_1 auf T_2 abbildet. Bestimmen Sie den Typ der zugehörigen orthogonalen Abbildung.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die symmetrische Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sigma(x,y) = x^\top \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 29 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} y$$

ein Skalarprodukt ist und geben Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich σ) des orthogonalen Komplements von $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich σ im $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter ist, sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},\quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das Tripel von Vektoren (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.
b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ erfällt?
c) Geben Sie im Fall $t = 1$ die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung aus b) bezüglich der Standardbasis an.

Aufgabe 5:

Es sei Q der Kegelschnitt, der durch die Gleichung

$$16x^2 + 4y^2 + 16xy + 4x + 12y + 3 = 0$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q sowie den Typ von Q.