Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gilt $Av \in \mathbb{R}v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnlich zu $-A$, so ist $A = 0$.

c) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$, so ist $A = 0$.

Aufgabe 2:
Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\sigma(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

und

$$\sigma(v_1, v_1) = 1, \quad \sigma(v_2, v_2) = 2, \quad \sigma(v_3, v_3) = 3.$$

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement U von

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich des obigen Skalarprodukts σ und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Es seien

$$U = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } W = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Weiter seien

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}$$

und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) \in (x+U) \cap W$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Menge

$$(x+U) \cap W$$

einelementig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(p \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ gilt.

d) Bestimmen Sie alle eindimensionalen Untervektorräume V von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim((p \circ f)(V)) = 1$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 4 und

$$d : V \to V, \quad \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{4} -i a_i x^{i-1}.$$

a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$f : V \to V, p \mapsto d(p) + 2p.$$

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis

$$1, 1 + x, x^2 + x, x^3, x^4$$

von V.

Aufgabe 5:
In Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ sei eine Familie von Quadriken Q_a durch die folgende Gleichung gegeben:

$$(a + 4)x^2 + (4 - 4a)xy + (4a + 1)y^2 - 5a = 0.$$

Man bestimme die Euklidische Normalform und den Typ von Q_a in Abhängigkeit von a.