Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $L_{s,t}$ der Lösungsraum des von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ abhängigen linearen Gleichungssystems $A_{s,t}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A_{s,t} := \begin{pmatrix} 0 & s & s+t \\ t & 0 & t \\ s+t & s & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\det(A_{s,t})$ und den Rang von $A_{s,t}$ in Abhängigkeit von s und t.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $L_{s,t}$ in Abhängigkeit von s und t. Dabei sei die Dimension der leeren Menge gleich -1.

c) Bestimmen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ der Raum $L_{s,t}$ eine zu

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

windschiefe Gerade ist.

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$,
(ii) $A^2 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass aus (i) oder (ii) folgt:

(iii) 0 ist der einzige reelle Eigenwert von A.

c) Bestimmen Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob (ii) aus (iii) folgt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Betrachten Sie folgende lineare Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0\} \text{ und } F = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $E \cap F$.

b) Ergänzen Sie diese Basis zu orthonormalen Basen von E bzw. F bzw. $\mathbb{R}^3$.

c) Es seien $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Projektionen auf E bzw. F. Zeigen Sie $P_E \circ P_F = P_F \circ P_E$, und dass $P_F \circ P_E$ eine orthogonale Projektion P_G auf einen Unterraum G ist. Bestimmen sie G.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie eine invertierbare 2×2-Matrix A und einen Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$$

eine Gleitspiegelung ist, die die Gerade $y - 2x = 5$ als Spiegelachse hat und die den Punkt $(-3, 4)$ auf den Punkt $(2, 4)$ abbildet.

Aufgabe 5:
Gegeben seien die Kegelschnitte

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - y^2 - 2xy - 4 = 0\} \quad \text{und} \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 1 = 0\}.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ von H und von K.

b) Bestimmen Sie eine affine Abbildung, die H auf K abbildet.