Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ b & 1 & b & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 2:

a) Geben Sie eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = -1$ und $A \neq -E_3$ an, die *keine* Spiegelung an einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ beschreibt, und begründen Sie, weshalb die von Ihnen angegebene Matrix die gewünschten Eigenschaften hat.

b) Beweisen Sie: Eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^3$ beschreibt, hat Determinante 1.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Beweisen Sie: Wenn n ungerade ist und es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$SAS^{-1} = -A$$

gibt, dann ist A nicht invertierbar.

b) Sei A invertierbar und es gebe eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$TAT^{-1} = A^{-1}.$$

Beweisen Sie: Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A und die geometrischen Vielfachheiten von λ und $\frac{1}{\lambda}$ sind gleich.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

a) Zeigen Sie: Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, so gibt es ein Skalarprodukt $\langle .\,,\,. \rangle$ auf V, sodass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle .\,,\,. \rangle$ ist.

b) Seien $\langle .\,,\,. \rangle_1$ und $\langle .\,,\,. \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V. Zeigen Sie: Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to V$, sodass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v\,,\, w \rangle_1 = \langle f(v)\,,\, f(w) \rangle_2.$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Scheitelpunkte der Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = 12 \right\}.$$

Die Scheitelpunkte einer Quadrik sind die Schnittpunkte der Quadrik mit ihren Symmetrieachsen.