Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_t.
b) Bestimmen Sie den Eigenraum von A_t zum Eigenwert 1.
c) Geben Sie alle t an, für die die Matrix A_t diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.
d) Geben Sie im Fall, dass A_t diagonalisierbar ist, eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A_t an.

Aufgabe 2:
Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gilt Kern φ = Kern φ^2, so ist φ injektiv.
b) Ist φ injektiv, so gilt Kern φ = Kern φ^2.
c) Gilt Kern φ = Kern φ^2, so folgt Kern φ^2 = Kern φ^3.

Aufgabe 3:
Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum aller reellen 2×2 Matrizen. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$$

sei die Spur von A definiert durch

$$\operatorname{Sp}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Die Spur von A ist also die Summe der Diagonaleinträge der Matrix A.

Es sei

$$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (A, B) \longmapsto \operatorname{Sp}(AB^\top),$$

wobei $B^\top$ die zu B transponierte Matrix bezeichnet.

Fortsetzung nächste Seite!

a) Zeigen Sie, dass σ ein Skalarprodukt ist.

b) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Skalarprodukts σ.

Aufgabe 4:

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Endomorphismus, der

$$\varphi^2 = \mathrm{id}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_B^B(\varphi)$ von φ bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und die Darstellungsmatrix $M_E^E(\varphi)$ von φ bezüglich der kanonischen Basis

$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Betrachten Sie für $t \in \mathbb{R}$ den Kegelschnitt

$$K_t := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + (t-1)y^2 + 2xy - 4x + (4t-12)y + (4t-5) = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den affinen Typ von K_t.

b) Geben Sie für $t = 1$ eine bijektive affine Abbildung an, die K_1 auf

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 1 \right\}$$

abbildet.