Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ Determinante und Rang von

$$\begin{pmatrix} (\lambda-1)\lambda & 2\lambda & -4 \\ 2(\lambda-1)\lambda & 2\lambda & 2 \\ 2(\lambda-1)\lambda & \lambda & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ ein lineares Gleichungssystem in den Unbestimmten X_1, X_2, X_3 mit Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Zu gegebenem $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung

$$\rho_B : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, A \mapsto AB.$$

a) Weisen Sie nach, dass ρ_B ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von ρ_B bezüglich der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

c) Bestimmen Sie den Rang von ρ_B in Abhängigkeit vom Rang von B.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $|a - c| > |2b|$, dann ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

b) Wenn $|a - c| < |2b|$, dann ist A über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 4:

Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Geben Sie eine Definition für die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ an.

b) Zeigen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig und ist

$$v_{n+1} \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n),$$

so sind $v_1, \ldots, v_{n+1}$ ebenfalls linear unabhängig.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n:
Besitzt V kein endliches Erzeugendensystem (d. h., für jede endliche Menge $M \subseteq V$ ist $\operatorname{span}(M) \neq V$), so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine n-elementige linear unabhängige Teilmenge M_n von V.

Aufgabe 5:

a) Sei α ein reeller Parameter. Die Teilmenge Q_α von $\mathbb{R}^2$ soll aus allen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$(16\alpha^2 - 16\alpha + 25)x^2 + (9\alpha^2 - 9\alpha + 25)y^2 + 24(\alpha - \alpha^2)xy = 25(\alpha + 1)^2$$

bestehen. Bestimmen Sie die metrische Normalform der Quadrik Q_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Tipp für die Rechnung: Links $\beta := \alpha^2 - \alpha$ substituieren]

b) Bestimmen Sie alle Werte von α, für die Q_α ein Kreis ist.