Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto A \cdot x + t$$

die Gleitspiegelung mit Gleitspiegelachse

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und Verschiebevektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist.

2. Aufgabe

Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Geraden gegeben:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 1 \text{ und } x + y - z = 1 \right\} \quad \text{und}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob g und h parallel sind, sich schneiden oder windschief sind.

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Lotgerade l von g und h, und berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ von g und h.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(a) Berechnen Sie für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $xy^\top$.

(b) Beweisen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $\text{Rang}(xy^\top) \leq 1$.

(c) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(A) \leq 1$, dann gibt es Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $A = xy^\top$.

4. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Beweisen Sie:

(a) Bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ von $\mathbb{R}^n$ stehen $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ aufeinander senkrecht.

(b) Es gilt $\mathbb{R}^n = \text{Kern}(A) \oplus \text{Bild}(A)$.

5. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Hat eine Quadrik Q im $\mathbb{R}^2$ zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen s_1 und s_2, dann ist der Schnittpunkt m dieser Symmetrieachsen ein Mittelpunkt von Q.

(b) Sind Q_1 und Q_2 zwei kongruente (metrisch äquivalente) Quadriken im $\mathbb{R}^2$, dann gibt es nur endlich viele euklidische Bewegungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$.