Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe

Es sei V ein reeller Vektorraum mit Basis v_1, v_2, v_3, v_4 und W ein reeller Vektorraum mit Basis w_1, w_2, w_3, w_4. Weiter sei $f : V \to W$ linear und es gelte für alle $k = 1, 2, 3, 4$

$$f(v_k) = \sum_{i=1}^{4} (|k - i| - 1) w_i.$$

Bestimmen Sie den Rang von f.

3. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Menge

$$M_1 = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \text{Null ist Eigenwert von } X\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Die Menge

$$M_2 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor von } X \right\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Es seien $G_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 3\}$ und $G_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Euklidische Bewegung, welche die Bedingungen $f(G_1) = G_2$ und $f(G_2) = G_1$ erfüllt.

(a) Begründen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

(b) Untersuchen Sie, ob f eine Drehung, eine Translation, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

5. Aufgabe

Zu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$Q_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} x = 1 - \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Euklidische Normalform sowie den affinen Typ der Quadrik Q_α in Abhängigkeit von α.