Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ für den unbekannten Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

(a) Ist $m < n$, so ist (1) nie (d.h. für keine Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) eindeutig lösbar.

(b) Ist $m > n$, so ist (1) nie (d.h. für keine Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) eindeutig lösbar.

(c) Ist $m = n$, so ist (1) immer (d.h. für jede Wahl von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$) eindeutig lösbar.

2. Aufgabe

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die reelle 2×2 - Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+2 & t \\ -t & t-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

3. Aufgabe

Auf dem Unterraum

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

des $\mathbb{R}^4$ werde die symmetrische Bilinearform

$$\sigma : U \times U \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} y$$

betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung σ ein Skalarprodukt auf dem Untervektorraum U ist.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich σ an.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Für Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\overline{pq}$ die (ungerichtete) Strecke von p nach q.

(a) Geben Sie vier verschiedene Bewegungen φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 der Ebene $\mathbb{R}^2$ an, welche die Strecke $\overline{\binom{0}{0}\binom{1}{0}}$ auf die Strecke $\overline{\binom{3}{0}\binom{4}{0}}$ abbilden.

(b) Bestimmen Sie $\varphi_i\binom{0}{1}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

(c) Geben Sie (mit Begründung) für jede der Bewegungen φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 an, um welchen Typ von Bewegung es sich handelt. Als Typen stehen zur Verfügung:

- *Translation*
- *Drehung*
- *Achsenspiegelung*
- *Gleitspiegelung* (auch *Schubspiegelung* genannt)

5. Aufgabe

Zeigen Sie, dass der Kegelschnitt

$$H = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \ -11x^2 - 4y^2 + 24xy + 26x - 32y - 20 = 0\}$$

eine Hyperbel ist und bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten von H.