Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

b) Weisen Sie nach, dass A diagonalisierbar ist.

2. Aufgabe

Es bezeichne P_2 den reellen Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Weiter sei a ein reeller Parameter.

a) Ermitteln Sie diejenigen Werte für $a \in \mathbb{R}$, für die

$$(1 + 2X + X^2,\ aX + X^2,\ a + X)$$

linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung

$$\varphi : P_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gibt, die

$$\varphi(1 + 2X + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(aX + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\varphi(a + X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die diese lineare Abbildung eindeutig ist.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Bewegungen β des $\mathbb{R}^2$, die

$$\beta\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$$

erfüllen.

4. Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix mit $\operatorname{Spur}(A) = 3$ und $\operatorname{Det}(A) = 2$.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A die Form

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

hat und folgern Sie daraus, dass A diagonalisierbar ist.

b) Folgern Sie, z.B. mit *a)*, dass

$$\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \operatorname{Spur}(B) = 3, \operatorname{Det}(B) = 2\}$$

die Menge aller zu $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ ähnlichen Matrizen ist.

5. Aufgabe

Geben Sie die Gleichung einer Hyperbel im $\mathbb{R}^2$ an, deren Asymptoten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

bestimmt sind.